9. AISLE EL SISTEMA!

En sintesis, al tratar cualquier problema de Mecánica Newtoniana se procede de la siguiente manera: Se define claramente el sistema material que es objeto de estudio y se hace una representación gráfica aproximada de él. Se determina a continuación cuáles cuerpos del entorno interactúan significativamente con el sistema en estudio y se representan estas acciones por medio de fuerzas, es decir, por medio de flechas en nuestro diagrama aproximado. El proceso consiste pues en realizar lo que se ha llamado un **diagrama de cuerpo libre**, o equivalentemente, en **aislar el sistema.** Este es el primer paso al afrontar cualquier problema de Estática o Dinámica Newtoniana.

Sugerencia: *Al afirmar que una fuerza actúa sobre un cuerpo es preciso tener claro **cuál** cuerpo ejerce dicha fuerza y sobre **cuál** cuerpo actúa.*

EJERCICIOS.

A. Medida de las magnitudes fundamentales.

1. Realizar mediciones de longitudes características y masas de diferentes objetos y colecciones de objetos.

    - Medir el diámetro y la masa de una pelota de tenis de campo, de golf, de tenis de mesa,...

    - Medir longitudes y espesores de diversos tipos de tornillos, clavos...

    - Medir diámetros, espesores y masas de diversas monedas.

    - Precisar longitudes características y masas de los planetas del Sistema solar.

2. Calcular la densidad de cada uno de los cuerpos considerados en el ejercicio anterior.

3. Medir la masa de agua que puede contener una cuchara sopera. Calcular aproximadamente el número de moléculas contenidas allí. Hacer lo mismo con el agua que habitualmente consumimos cuando bebemos "un vaso de agua".

4. Medida de tiempos.

- Medir periodos de diversos movimientos oscilatorios y fenómenos periódicos.

- Medir y estimar los "tiempos característicos" de diversos fenómenos.

- Enumerar algunas situaciones en las cuales la masa del sistema considerado varía con el tiempo.

5. Medida de fuerzas.

- Medir fuerzas y coeficientes de fricción entre diversos materiales.

- Calibrar resortes y medir fuerzas por medio de dinamómetros.

- Cuál es su peso en Kgf? Y su peso en Newtons?

B. Sistemas de referencia y de coordenadas.

Determinar cuál sistema de referencia sería el más adecuado y cuál sistema de coordenadas utilizaría en cada uno de los siguientes casos:

1. Para el estudio de caídas cortas sobre la superficie de la Tierra.

2. Para el estudio de la rotación de la Tierra y sus efectos.

3. Para el estudio del movimiento de translación de la Tierra alrededor del Sol.

4. Para el estudio de la circulación atmosférica en la Tierra.

5. Para la descripción del movimiento de un avión o un cohete observado desde un radar en tierra.

6. Para el estudio del movimiento de un satélite de un planeta.

7. Para el estudio de un sismo.

8. Para el estudio del movimiento de cuerpos en el interior de un barco o un vehículo espacial.

9. Para el estudio del movimiento de cuerpos en el interior de un carro que efectúa una curva.

C. Diagramas de cuerpo libre.

Hacer diagramas de cuerpo libre en cada uno de los siguientes casos:

1. Un libro sobre una mesa.

2. Una escalera apoyada en una pared.

3. Un hombre camina, corre y salta.

4. Un hombre conduce una carretilla.

5. Una viga simplemente apoyada.

6. Una gota de lluvia cayendo.

7. Un carro i) en reposo a punto de comenzar a moverse, ii) moviéndose y aumentando la velocidad, iii) moviéndose hacia adelante mientras frena abruptamente, iv) moviéndose con el motor apagado.

8. Un cuerpo que cuelga de un resorte.

9. i) Un bloque que se coloca sobre un plano inclinado. ii) Una esfera o cilindro que rueda por un plano inclinado.

10. Utilizando cuerdas y poleas se pueden realizar muchos arreglos bastante útiles. Haga algunos de ellos, represéntelos por medio de diagramas. Aísle diversos sistemas para su estudio y haga sus diagramas de cuerpo libre.

11. Un arco tenso.

D. Interacciones Fundamentales.

1. Calcular e investigar la aceleración de la gravedad en diversos planetas del sistema solar.

2. Estudiar la variación de la aceleración de la gravedad con la altura sobre la superficie de la Tierra.

3. Calcular la atracción gravitacional entre dos personas cuyo peso es 60 Kgf que están separadas 1 metro.

4. Hacer una comparación cuantitativa entre la interacción gravitacional y la interacción eléctrica entre dos electrones.

5. Halle la fuerza de atracción eléctrica, en Newtons, entre el electrón y el protón de un átomo de hidrógeno, si su distancia de separación es $0.53*10^{-10}$metros; compare esta fuerza con su atracción gravitacional.

6. Los cuerpos macroscópicos tienden a la neutralidad eléctrica. Supongamos que el número de electrones supera en 1 al número de protones en cada molécula de agua. Determinar la magnitud aproximada de la fuerza eléctrica que se ejercerían dos personas situadas a 10m de distancia, suponiendo que los cuerpos humanos en cuestión tienen 45Kg de agua. (En 18 gramos de agua hay $6.02*10^{23}$ moléculas. Porqué?).

7. Calcule la fuerza de repulsión (en Newtons y en Kgf) entre dos protones que forman parte de un núcleo atómico y que se encuentran separados por una distancia de $1.3*10^{-15}$ metros. La fuerza nuclear debe ser superior a este valor.

8. Hacer gráficos Fuerza vs Distancia de separación si:
   a) la interacción es gravitacional o electrostática ($F = K/r^2$).
   b) la interacción es entre átomos o moléculas.
   c) la interacción es elástica.

E. Fuerzas de contacto.

1. Se amarran dos piedras con una cuerda y se dejan caer libremente cerca de la superficie de la Tierra. Calcular la fuerza ejercida por una piedra sobre la otra mientras caen. Afecta esta fuerza el movimiento de descenso de la piedra?

2. "La fuerza de fricción es independiente del área de contacto". Discuta esta afirmación y realice un experimento para su estudio.

BIBLIOGRAFIA

1. Maxwell,J.C. Materia y Movimiento.
2. Eisberg,Lerner. Física.Fundamentos y Aplicaciones.
3. French,A.P. Mecánica Newtoniana.
4. Hecht,E. Física en Perspectiva.
5. Alonso,Finn. Fundamental University Physics.
6. Sivoukhine,D. Cours de Physique Générale. Tomo 1. Mécanique.

7. Synge,Griffith. Principles of Mechanics.
8. Goldemberg,J. Física General y Experimental.
9. Gerthsen,Kneser,Vogel. Física.
10. Newton,Isaac. Principios Matemáticos de Filosofía Natural.
11. Born,Max.El Inquieto Universo.
12. Feynman, Leighton, Sands. The Feynman Lectures on Physics
13. Galileo Galilei. Diálogo sobre los sistemas máximos.
Segunda Jornada
14. Historia de la ciencia. 2
15. Euler,Leonhard. Reflexiones sobre el espacio, la fuerza y la materia.
16. Gamow, George. La gravedad. 1961. Selecciones de Scientific American.
17. Hawking,Stephen. Historia del Tiempo.
18. De Broglie, Louis. Por los senderos de la ciencia.
19. Beer, Johnston. Mecánica vectorial para ingenieros. Estática. Tercera edición.
20. Meriam, J.L. Mecánica. 1. Estática.

MAGNITUDES FISICAS, UNIDADES Y DIMENSIONES *

En la descripción y estudio de los fenómenos físicos se han desarrollado y se desarrollan conceptos abstractos muy especiales llamadas *magnitudes físicas*. Estas magnitudes se definen por medio de un conjunto de *operaciones experimentales* que permiten obtener un *número como medida de la magnitud* en cualquier situación. Esta definición comprende dos pasos esenciales: 1) la elección de una *unidad de medida* con múltiplos y submúltiplos y 2) un proceso para comparar la magnitud a medir con la unidad de medida y establecer un número (entero o fraccionario) como medida de la magnitud. Son ejemplos de magnitudes físicas: la longitud, el área, el volumen, el tiempo, la masa, la energía, la temperatura, la fuerza, la potencia, la velocidad, la aceleración, etc.

Una de las tareas fundamentales de la Física consiste en establecer las relaciones que existen entre las diversas magnitudes que intervienen en un fenómeno determinado. Estas *relaciones matemáticas* - definiciones o leyes - permiten asociar la medida de una magnitud con la medida de las otras magnitudes con las cuales está relacionada. Por ejemplo, cuando una partícula se mueve en una línea recta se define la *velocidad* como la *longitud* recorrida por la partícula en la *unidad de tiempo*, y si se ha definido adecuadamente un sistema de unidades, se escribe $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, donde Δt es el tiempo que se toma la partícula en recorrer la longitud Δx. Asímismo, la *aceleración* se define como el cambio de velocidad sufrido en una unidad de tiempo, y se escribe $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Por otra parte, la segunda ley de Newton establece que la *aceleración* que sufre esta partícula es proporcional a la *fuerza neta* que actúa sobre ella, y se escribe

$$F = m\,a\,,$$

donde m es la *masa* -o inercia - del cuerpo.

El concepto de *dimensión* de una magnitud aparece cuando se trata de construir un *sistema de unidades*. En principio, podría asignársele *a cada magnitud física una unidad* de medida propia completamente independiente de las unidades de medida de las otras magnitudes. Así, podríamos asignar una unidad de medida para la longitud, otra para el tiempo, otra para la velocidad, otra independiente para la aceleración y

---

* Notas de estudio. Profesores de Física I. U. Nal. Medellín.
Redacción : Miguel Monsalve G, Agosto/89

398697

asimismo otra para la fuerza, pero ésto nos conduciría a la necesidad de especificar coeficientes que realizaran las conversiones de unidades y escribiríamos

$$v = C_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} \ , \quad a = C_2 \frac{\Delta v}{\Delta t} \ , \quad f = C_3 \, m \, a$$

Ante la posibilidad de semejante proliferación de coeficientes de conversión (prácticamente uno por cada definición o ley), se ha establecido un procedimiento general para construir sistemas de unidades: se adoptan por convención algunas magnitudes físicas como *fundamentales* y se eligen arbitrariamente sus respectivas unidades de medida; las magnitudes que no forman parte de las fundamentales son llamadas *derivadas* y sus unidades de medida se establecen fijando los valores numéricos de los coeficientes que figuran en las expresiones matemáticas que definen estas magnitudes. Así, por ejemplo, en Mecánica Newtoniana las magnitudes escogidas internacionalmente como fundamentales son *longitud*, *tiempo* y *masa* - escogencia que proviene del desarrollo histórico de los conceptos intuitivos de espacio, tiempo y materia - y sus unidades de medida arbitrariamente escogidas, son el metro (m), el kilogramo (kg) y el segundo (s). En consecuencia, la velocidad, la aceleración y la fuerza son magnitudes derivadas y haciendo $C_1=C_2=C_3=1$, las expresiones matemáticas que definen estas magnitudes son entonces

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \ , \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \ , \quad f = m \, a \ .$$

Las unidades de medida de estas magnitudes derivadas quedan unívocamente determinadas en función de las unidades de medida de las fundamentales; la unidad de velocidad es entonces el metro por segundo (m/s ó ms^{-1}), la unidad de aceleración es el metro por segundo por segundo [$(m/s)/s = m/s^2$ ó ms^{-2}] y la unidad de fuerza es el kilogramo metro sobre segundo al cuadrado ($kg\ m/s^2 = kg\ m\ s^{-2}$= Newton = N). (Véase el Sistema Internacional de Unidades SI en el apéndice a estas notas).
Y es en este punto donde aparece la noción de "dimensión" de una magnitud física. Si decimos

"la dimensión de longitud es L",
"la dimensión de tiempo es T",
y "la dimensión de masa es M",

escribiendo $[\Delta x] = L$
$[\Delta t] = T$
$[m] = M$,

podemos entonces asignar a cada magnitud física una "dimensión" en términos de las dimensiones L, T, M de las magnitudes fundamentales. Por ejemplo, dado que $v = \Delta x/\Delta t$, escribimos $[v] = [\Delta x]/[\Delta t] = L/T = LT^{-1}$, y decimos que "la dimensión de velocidad es LT^{-1}.

Asimismo, como $a = \Delta v/\Delta t$, escribimos $[a] = LT^{-1}/T = LT^{-2}$. Así, "la dimensión de aceleración es LT^{-2}"

Igualmente, partiendo de la expresión $f = ma$, se obtiene

$$[f] = [m]\,[a] = M\,L\,T^{-2},$$

"la dimensión de fuerza es $M\,L\,T^{-2}$".

Ahora bien, cuando se dice, por ejemplo, que la dimensión de velocidad es $L\,T^{-1}$ lo que se afirma es que la unidad de velocidad es la unidad de longitud sobre la unidad de tiempo, cualesquiera sean las unidades fundamentales de longitud y tiempo. Así, la expresión $[v] = LT^{-1}$ significa en sistema mks (metro-kilogramo-segundo) que la unidad de velocidad es m/s. Asimismo, las expresiones $[a] = LT^{-2}$ y $[f] = MLT^{-2}$ significan que la unidad de aceleración es m/s^2 y que la unidad de fuerza kg m/s^2, unidad ésta última denominada Newton.

En esta forma, cada magnitud mecánica z tendrá una *fórmula dimensional* en términos de las dimensiones de las magnitudes fundamentales:

$$[z] = M^a\,L^b\,T^c.$$

* * * * * * *

PRINCIPIO DE HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL

Este principio corresponde a la noción intuitiva de que sólo pueden sumarse o igualarse cantidades del mismo tipo y que no puede hacerse lo mismo con cantidades de tipo diferente. En términos simples, este principio puede expresarse así: *todos los términos de las ecuaciones físicas deben tener las mismas dimensiones*. Por ejemplo, cuando una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta aumentando su velocidad con un ritmo constante, su posición x en cualquier instante t está dada por la ecuación

$$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}\,a\,t^2,$$

donde x_o y v_o son la posición y la velocidad en $t=0$. Podemos observar que todos los términos que aparecen en la ecuación para x tienen dimensión de longitud, pues

$$[x] = L, \quad [x_o] = L, \quad [v_o t] = [v_o][t] = L\,T^{-1}T = L,$$

y $$[\tfrac{1}{2}\,a\,t^2] = [a][t^2] = L\,T^{-2}\,T^2 = L,$$

y por tanto la ecuación es dimensionalmente homogénea.
También la expresión para la velocidad de la misma partícula,

$$v = v_o + a\ t,$$

es dimensionalmente homogénea, pues

$$[v] = L\ T^{-1}, \quad [v_o] = L\ T^{-1}, \text{ y } [at] = [a][t] = L\ T^{-2}T = L\ T^{-1},$$

teniendo todos los términos las mismas dimensiones.

Este principio suministra un método muy eficaz para el control de la consistencia de las ecuaciones que se manejan en el estudio de algún problema. Así, si en alguna expresión matemática que relacione las magnitudes físicas pertinentes al problema, los términos que se suman o se igualan no tienen todos la misma dimensión, hay un error en alguna parte y se hace preciso revisar. Pero ¡cuidado!, la homogeneidad dimensional no garantiza que la ecuación sea correcta : puede haber errores en las constantes o, más fundamentales aún, errores en la concepción del problema.

En consecuencia, las ecuaciones que se manejan en física deben ser todas dimensionalmente homogéneas, y en el momento de realizar los cálculos para obtener el valor numérico de una magnitud en términos de los valores numéricos conocidos de las otras magnitudes, las unidades de medida deben ser expresadas todas en el mismo sistema de unidades : la homogeneidad dimensional y la consistencia de las unidades son dos aspectos de una misma cosa.

* * * * * * *

SISTEMAS DE UNIDADES

Desde 1889, las definiciones de las unidades de medida de las magnitudes fundamentales son establecidas por una organización internacional llamada Conferencia General de Pesas y Medidas, y cuenta con representantes de la mayoría de los paises del mundo. El sistema de unidades definido por esta organización, basado en el sistema métrico decimal y cuyo más inmediato antecesor es el sistema MKS, se conoce oficialmente desde 1960 como Sistema Internacional o SI, y su uso tiende a ser adoptado mundialmente.

En este sistema han sido escogidas como magnitudes fundamentales las siguientes: longitud, tiempo, masa, intensidad de corriente eléctrica, intensidad luminosa, temperatura y cantidad de sustancia. En la tabla siguiente nombramos las unidades definidas como fundamentales y sus respectivos símbolos.

MAGNITUD FUNDAMENTAL	UNIDAD DE MEDIDA SI	SIMBOLO DE LA UNIDAD
Longitud	metro	m
Tiempo	segundo	s
Masa	kilogramo	kg
Corriente electrica	Amperio	A
Temperatura	Kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
cantidad de sustancia	mol	mol

Se hace necesario definir además unidades suplementarias para la medida de ángulos planos y la medida de ángulos sólidos; éstas y un conjunto de unidades SI muy utilizadas en Mecánica son listadas a continuación. Se incluye también la fórmula dimensional de cada magnitud

MAGNITUD	SÍMBOLO TÍPICO USUAL	UNIDAD PATRÓN INTERNACIONAL	DIMENSION
LONGITUD	L	Metro, m	L
MASA	M	Kilogramo, kg	M
TIEMPO	T	segundo, s	T
VELOCIDAD	v	m/s	LT^{-1}
ACELERACIÓN	a	m/s^2	LT^{-2}
ANGULO PLANO	θ, ϕ	radianes, rad	Adimensional
ANGULO SOLIDO	Ω	esteradián	Adimensional
VELOCIDAD ANGULAR	ω	rad/s	T^{-1}
ACELERACIÓN ANGULAR	α	rad/s^2	T^{-2}
FRECUENCIA	ν	Hertz $[s^{-1}]$	T^{-1}
MOMENTUM-IMPULSO	P	kg-m/s	MLT^{-1}
FUERZA	F	Newton (N)	MLT^{-2}
TRABAJO-ENERGÍA	W, E	Joule, J(N-m)	ML^2T^{-2}
POTENCIA	Pot	Vatio(Watt)	ML^2T^{-3}
MOMENTUM ANGULAR	L	kg m /s	ML^2T^{-1}
TORQUE	τ	N m	ML^2T^{-2}
MOMENTO DE INERCIA	I	kg m^2	ML^2
PRESIÓN-ESFUERZO	P, σ	Pascal, Pa(N/m^2)	$ML^{-1}T^{-2}$
MÓDULO DE ELASTICIDAD	Y, B, G	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
MÓDULO DE COMPRESIBLIDAD	$\varkappa$	Pa^{-1}	$M^{-1}LT^2$
VISCOSIDAD	η	Pa s	$ML^{-1}T^{-1}$
CALOR	Q	J	ML^2T^{-2}
ENTROPIA	S	$J/^oK$	ML^2T^{-2}

Para una lista más completa del sistema internacional de unidades SI y su definición precisa, véase el apéndice a estas notas, tomado de Física Universitaria. Sears,Zemansky y Young. Sexta edición. F.E.I.

Otro sistema de unidades de gran importancia en física es el sistema cgs que define el centímetro, el gramo y el segundo como unidades de medida para la longitud, la masa y el tiempo respectivamente. Su uso en Mecánica es relativamente escaso, pero en la teoría electromagnética es de gran importancia.

Las unidades del sistema Inglés o Británico, en vías de extinción, se definen ahora oficialmente en función de de las unidades SI de la siguiente manera :

Longitud : 1 pulgada = 2.54 cm.
Masa : 1 libra masa = 0.45359237 kg
Tiempo : 1 segundo = 1 s

La libra es la unidad de fuerza en el sistema Británico, y equivale a una fuerza igual al peso de una libra masa en condiciones específicas. En física, las unidades Inglesas sólo se emplean en Mecánica y en Termodinámica, y no existe un sistema británico de unidades eléctricas.

Otras unidades de fuerza que, aunque no forman parte de ningún sistema de unidades, son : el kilogramo fuerza (kgf) y el gramo fuerza (gf) : 1 kgf es el peso de una masa de un kilogramo en la superficie de la tierra; de la expresión f= ma se deduce que en un sitio donde la aceleración de la gravedad sea 9.8 m/s^2,

$$\begin{aligned} 1 \text{ kgf} &= (1 \text{ kg})\,(9.8 \text{ m/s}^2) \\ &= 9.8 \text{ kg m/s}^2 \\ &= 9.8 \text{ N.} \end{aligned}$$

Asímismo, 1 gf es el peso de una masa de 1 g; así,

$$\begin{aligned} 1 \text{ gf} &= (1 \text{ g})\,(980 \text{ cm/s}^2) \\ &= 980 \text{ g cm/s}^2 \\ &= 980 \text{ dinas,} \end{aligned}$$

siendo una dina = 1 g cm/s^2. (1 dina = 10^{-5} N).

EJERCICIOS.

1. Determinar la dimensión de cada una de las siguientes magnitudes físicas:

a) Velocidad.

b) Aceleración.

c) Fuerza.

d) Velocidad angular.

e) Aceleración angular.

f) Momento o Torque de una fuerza.

g) Densidad.

h) Peso específico.

2. Son dimensionalmente homogéneas las siguientes ecuaciones?

$$a = \frac{2d}{t^2} - \frac{2Vo}{t}.$$

$$d = \frac{V^2 - Vo^2}{2a}.$$

$$V = Vo + at.$$

$$d = Vot + \frac{1}{2}at^2.$$

$$d = \frac{Vo^2}{t} + 2at.$$

En estas ecuaciones d expresa la distancia recorrida y V la velocidad de un móvil que se mueve sobre una línea recta con aceleración constante a durante un tiempo t a partir de una velocidad Vo.

3. En la ecuación

$$Fd = \frac{1}{2}\,mV^2 + \frac{1}{2}\,Iw^2 + mVwy.$$

F es una fuerza, d una distancia, m una masa, V una velocidad, I el producto de una masa por una longitud al cuadrado, w una velocidad angular y y una distancia. Es esta ecuación dimensionalmente homogénea?

4. El trabajo que hace una fuerza F para imprimirle a un cuerpo de peso W una velocidad V a partir del reposo cuando la fuerza actúa a lo largo de una distancia d, es

$$\text{Trabajo} = Fd = \frac{1}{2}\frac{W}{g}V^2 .$$

Determinar la dimensión del trabajo y la dimensión de g.

5. La fuerza gravitacional entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados una distancia r está dada por

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{2}$$

Determinar las unidades de la constante G en el sistema internacional de unidades SI.
Asímismo, determinar las unidades de la constante K que aparece en la expresión de la fuerza electrostática entre dos cargas q_1 y q_2 separadas una distancia r,

$$F_e = K\frac{q_1 q_2}{r^2} .$$

6. Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido experimenta una fuerza de resistencia que depende de su velocidad relativa v según la expresión

$$F_f = Av + Bv^2 .$$

Determinar las unidades de las constantes A y B en el sistema internacional SI.

UNA BREVE INTRODUCCIÓN A LOS VECTORES*

En matemáticas y especialmente en física se presentan dos clases muy diferentes de cantidades. Considere por ejemplo, la masa, la densidad, el tiempo, la temperatura, la fuerza, la velocidad, el desplazamiento de un punto, la aceleración. Algunas de estas cantidades pueden representarse adecuadamente por un simple número - la temperatura por grados de una escala termométrica; el tiempo, por años, días, segundos; la masa y la densidad mediante valores numéricos enteramente determimados una vez se ha fijado la unidad de la escala. De otro lado, las cantidades restantes no son susceptibles de tal representación. Claro que se dice que una fuerza es de tantos kilogramos fuerza; y una velocidad de tantos metros por segundo. Pero *además* de esto se debe considerar que cada una de ellas posee tanto una *dirección* como una *magnitud*. Una fuerza se dirige (se orienta, apunta hacia) el Norte, Sur, Este, Oeste, hacia arriba, hacia abajo, ó en una dirección intermedia cualquiera. Lo mismo es cierto para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración. Ninguna escala numérica es capaz de representarlos adecuadamente. Ella sólo podría representar sus magnitudes, mas no sus direcciones.

Un vector se define geométricamente como una cantidad física caracterizada por una magnitud y una dirección en el espacio. Esquemáticamente representamos un vector mediante una flecha cuya longitud y dirección representan la magnitud y la dirección del vector en cuestión (Ver fig.1). En cuanto que la entidad de un vector representa un concepto único, resulta apropiado representarlo mediante una sola letra. Sin embargo, dada la diferencia fundamental entre escalares y vectores, es necesario distinguirlos cuidadosamente. Tipográficamente se escriben los vectores como una letra con una flecha encima de ella, por ejemplo, $\vec{A}$. Esto permite utilizar una misma letra con diferente impresión para representar el vector y su módulo escalar.

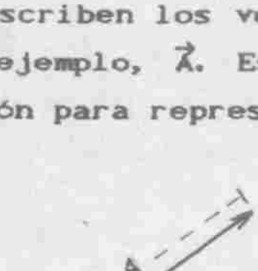


Fig. 1. Un vector $\vec{A}$ y su magnitud A

---

*Adaptación del libro de K. Symon, Mechanics, Addison wesley, 1963, cap. 3

Usualmente se representa la magnitud o módulo de un vector encerrándolo entre barras

$$A = |\vec{A}| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Se dice que dos vectores son iguales si poseen igual magnitud y dirección; el concepto mismo de vector no hace referencia a ninguna localización particular.* Se define el producto de un vector $\vec{A}$ y un escalar positivo como el vector $c\vec{A}$ en la misma dirección que el vector $\vec{A}$ y de magnitud cA. Si c es negativo, definimos $c\vec{A}$ como un vector de magitud $|c|A$ y dirección opuesta a la de $\vec{A}$. (Ver la fig.2). De la definición se sigue que,

$$|c\vec{A}| = |c| \; |\vec{A}| . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Fig. 2. Multiplicación de un vector por un escalar. ($c > 0$)

En base a la definición anterior es fácil demostrar que, la multiplicación de un vector por un escalar es asociativa en el siguiente sentido:

$$(cd)\vec{A} = c(d\vec{A}) . \quad . \quad . \quad (3)$$

A veces es conveniente escribir el escalar a la derecha del vector, por lo que definimos $\vec{A}c$ como el vector $c\vec{A}$:

$$\vec{A}c = c\vec{A} . \quad . \quad . \quad (4)$$

Definimos la suma $(\vec{A}+\vec{B})$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como el vector que se extiende desde el origen de $\vec{A}$ hasta la flecha de $\vec{B}$ después de hacer coincidir el origen de $\vec{B}$ con la flecha de $\vec{A}$, tal como en la figura 3.

* En ocaciones se distingue entre vectores *"libres"*, aquellos que no tienen una localización particular en el espacio; vectores *"deslizantes"*, aquellos que pueden estar localizados en cualquiera parte de una línea recta (es decir, que su punto origen puede deslizarse a lo largo de una recta); y vectores *"fijos"*, aquellos cuyo origen es un punto definido del espacio. En adelante consideraremos que un vector sólo está caracterizado por su magnitud y dirección, así que dos vectores son iguales si poseen la misma magnitud y la misma dirección, independientemente de su localización en el espacio.

Esta definición es equivalente a la usual regla del paralelogramo, y fácilmente se extiende a la suma de un número cualquiera de vectores, tal como en la fig. 4.

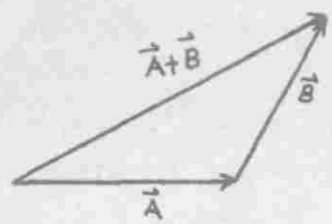


Fig. 3 Definición de la adición de dos vectores

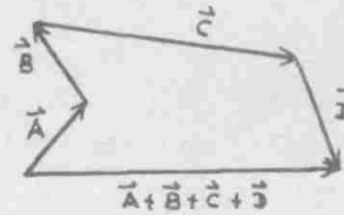


Fig. 4 Adición de varios vectores

En base a la definición de la figura 3, es fácil apreciar que la suma vectorial es conmutativa y asociativa:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}, \qquad (5)$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \qquad (6)$$

De acuerdo a la ec. (6), nos es posible omitir los paréntesis al escribir una suma de vectores, pues no importa el orden en que se sumen. En base a las definiciones de las figuras 3 y 4, también podemos demostrar las siguientes leyes distributivas:

$$c(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B}, \qquad (7)$$

$$(c + d)\vec{A} = c\vec{A} + d\vec{A} \qquad (8)$$

Estas leyes distributibas pueden demostrarse trazando diagramas que representen los miembros izquierdo y derecho de cada ecuación de acuerdo a las definiciones dadas. Por ejemplo, el diagrama de la Fig. 5 muestra que el resultado de sumar $\vec{C}$ a $(\vec{A}+\vec{B})$ es el mismo que sumar $(\vec{B}+\vec{C})$ a $\vec{A}$.

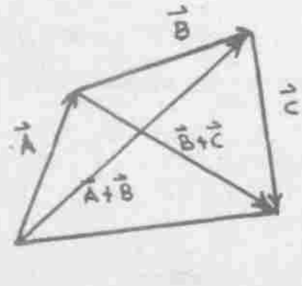


Fig. 5. Demostración de la ec. (6).

De acuerdo a las ecs. (3) a la (8), la suma de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar tienen las mismas propiedades algebraicas de los números ordinarios. Lo que justifica denominarlas sumas y productos. Así que es innecesario memorizar resultados, basta recordar que podemos manipular sumas y productos de igual manera que lo hacemos con los números ordinarios del álgebra, a excepción de la multiplicación por un escalar, en la cual se obtiene un vector a partir de un escalar y un vector.

Un vector puede representarse algebraicamente en términos de sus *componentes* o *proyecciones* a lo largo de un sistema de ejes coordenados. Se bajan perpendiculares desde el origen y la flecha del vector a los ejes coordenados tal como en la fig.6. La componente del vector a lo largo de uno de los ejes se define como la longitud del segmento de eje comprendido entre los pies de estas perpendiculares. La componente se toma como positiva o negativa de acuerdo a si la proyección de la flecha, mirada desde la proyección del origen del vector, se orienta en la dirección positiva o negativa del eje.

Las componentes de un vector $\vec{A}$ a lo largo de los ejes X-Y-Z se escriben como Ax, Ay, Az. A menudo se utiliza la notación (Ax, Ay, Az) como representación del vector $\vec{A}$:

$$\vec{A} = (Ax, \quad Ay, \quad Az). \qquad (9)$$

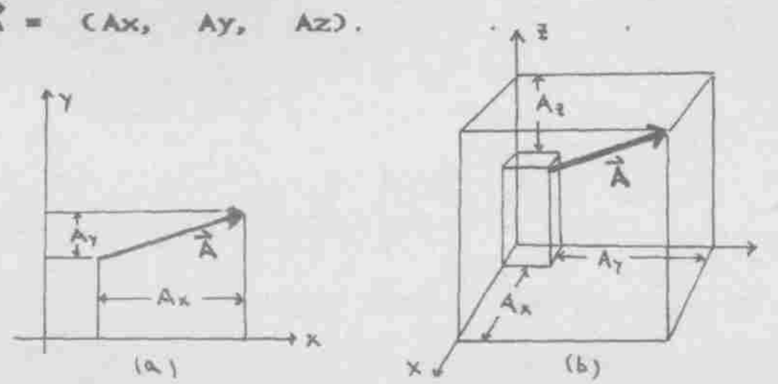


Fig. 6. (a) Componentes de un vector en un plano. (b) Componentes en el espacio.

Si definimos los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ como vectores de magnitud uno a lo largo los ejes X, Y, y Z respectivamente, entonces podemos escribir un vector como la suma de los productos de sus componentes con $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$:

$$\vec{A} = Ax\hat{i} + Ay\hat{j} + Az\hat{k}. \qquad (10)$$

Disponemos, entonces, de dos maneras equivalentes de definir un vector: Geométricamente como una cantidad poseedora de magnitud y dirección, o algebraicamente como una terna (Ax, Ay, Az) que denominamos las componentes.* Las operaciones de suma y multiplicación por un escalar, definidas geométricamente en las figuras 2 y 3 en términos de las magnitudes y direcciones de los vectores involucrados, pueden también definirse algebraicamente como operaciones con las componentes de los vectores. Así que $c\vec{A}$ es un vector cuyas componentes son las componentes de $\vec{A}$, multiplicadas cada una por c :

$$c\vec{A} = (cA_x,\ cA_y,\ cA_z), \qquad (11)$$

y el vector $\vec{A} + \vec{B}$ es un vector cuyas componentes se obtienen sumando las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x+B_x,\ A_y+B_y,\ A_z+B_z). \qquad (12)$$

La equivalencia de las definiciones (11) y (12) con las definiciones geométricas correspondientes puede demostrarse trazando diagramas apropiados. La Fig.7 constituye una demostración de la ec.(12) en el caso bidimensional. La magnitud o módulo de un vector $\vec{A}$ se define algebraicamente como sigue :

$$|\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}, \qquad (13)$$

donde se toma la raíz cuadrada positiva.

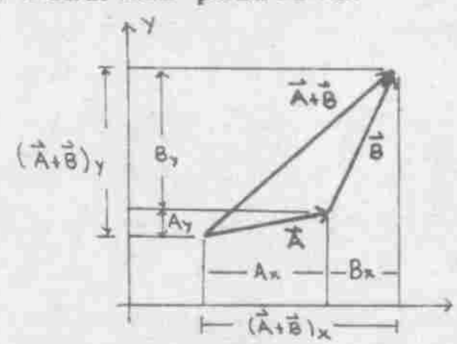


Fig. 7 Demostración de la equivalencia de las definiciones algebraica y geométrica de la adición vectorial.

Ahora podemos realizar las demostraciones algebraicas de las ecuaciones (2) (3), (5), (6), (7) y (8) basados en las definiciones (11), (12) y (13). Por ejemplo, para demostrar la ec.(7), mostremos que

* Estas dos maneras de definir un vector no son exactamente equivalentes tal como aquí se ha insinuado, pues la definición algebraica exige un sistema coordenado, mientras que la definicición geométrica no se refiere a ningún sistema particular de ejes. Esta diferencia puede subsanarse haciendo que la definición algebraica también sea independiente del sistema coordenado. Lo que se logra estudiando cómo se afectan las componentes cuando se cambian los ejes, y definiendo un vector como un conjunto de tres cantidades que se transforman de cierta manera cuando se hace un cambio de ejes. En adelante no nos preocuparemos de tal refinamiento.

cada componente del lado izquierdo coincide con cada componente del lado derecho. La demostración para la componente x es como sigue:

$$\begin{aligned}
[c(\vec{A} + \vec{B})]x &= c(\vec{A} + \vec{B})x && \text{[por la ec.(11)]} \\
&= c(Ax + Bx) && \text{[por la ec.(12)]} \\
&= cAx + cAx && \\
&= (c\vec{A})x + (c\vec{B})x && \text{[por la ec.(11)]} \\
&= (c\vec{A} + c\vec{B})x. && \text{[por la ec.(12)]}
\end{aligned}$$

Y como las definiciones (11), (12) y (13) tratan todas las componentes en pie de igualdad, la demostración también se cumple para las componentes Y y Z, por lo que los vectores del lado izquierdo de (7) son iguales a los del lado derecho.

En vista de la equivalencia de las definiciones algebraica y geométrica de las operaciones vectoriales, resulta innecesario, en las aplicaciones geométricas, hacer las dos demostraciones de cada fórmula del álgebra vectorial. Será suficiente hacer la demostración más sencilla. Sin embargo, en la física se dan casos importantes en los cuales debemos considerar conjuntos de cantidades que se comportan algebraicamente igual que las componentes de un vector aunque no es posible interpretarlas geométricamente como cantidades poseedoras de magnitud y dirección en el espacio ordinario. Así que para posibilitarnos usar las reglas del álgebra vectorial en tales aplicaciones, es importante notar que es posible demostrar algebraicamente todas estas reglas a partir de las definiciones algebricas de las operaciones vectoriales. El punto de vista geométrico tiene la ventaja de posibilitarnos visualizar el significado de las diferentes notaciones y fórmulas vectoriales. El punto de vista algebraico simplifica ciertas demostraciones, y posee la ventaja adicional de ampliar notablemente las aplicaciones del concepto matemático de vector, incluso en muchos casos en los cuales no se aplica el significado geométrico usual.

Definimos la resta de vectores en términos de la suma y la multiplicación por -1 :

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = (Ax\text{-}Bx,\ Ay\text{-}By,\ Az\text{-}Bz), \qquad (14)$$

La resta $\vec{A} - \vec{B}$ puede encontrarse geométricamente según uno cualquiera de los esquemas mostrados en la Fig.8. La Fig. 9 muestra que la suma y la resta de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son las diagonales del paralelogramo construído sobre sobre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como lados.

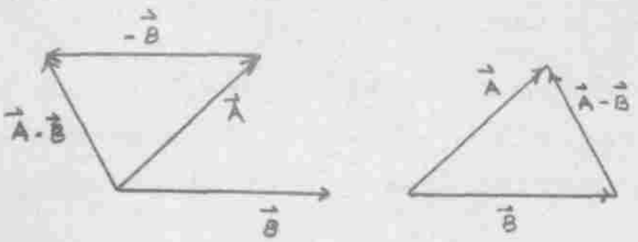


Fig. 8

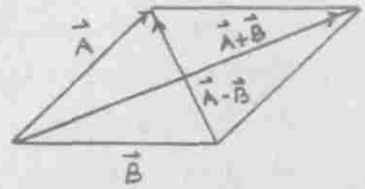
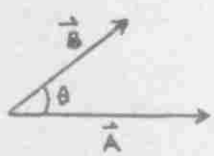


Fig. 9

Es útil definir el *producto escalar* ($\vec{A}\circ\vec{B}$) de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como el producto de sus magnitudes por el coseno del ángulo entre ellos:



$$\vec{A}\circ\vec{B} = AB\cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Fig. 10. El ángulo entre vectores (el ángulo entre las flechas, menor que 180°)

Nótese que se opera con dos vectores y el resultado es un número escalar, que bien puede ser negativo, positivo ó nulo dependiendo del ángulo entre los vectores. También se denomina *producto punto* (por la forma de escribirlo) ó *producto interno*, y posee una interpretación sencilla: es el producto de la magnitud de uno de los vectores por la proyección del otro sobre el anterior. Estamos autorizados a denominarlo un producto debido a que posee las siguientes propiedades algebraicas, fácilmente demostrables a partir de la definición (15):

$$(c\vec{A})\circ\vec{B} = \vec{A}\circ(c\vec{B}) = c(\vec{A}\circ\vec{B}), \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\vec{A}\circ(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\circ\vec{B} + \vec{A}\circ\vec{C}, \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$\vec{A}\circ\vec{B} = \vec{B}\circ\vec{A}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

$$\vec{A}\circ\vec{A} = A^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Estas ecuaciones significan que podemos tratar algebraicamente el *producto punto* como un producto en el álgebra de los números ordinarios, a condición de que recordemos que los dos factores deben ser vectores y el producto resultante es un escalar.

Las afirmaciones siguientes también surgen de la definición (15), donde $\hat{i}$, $\hat{j}$, y $\hat{k}$ son los vectores unitarios a lo largo de la dirección positiva de los ejes coordenados:

$$\begin{aligned} \hat{i}\circ\hat{i} &= \hat{j}\circ\hat{j} = \hat{k}\circ\hat{k} = 1, \\ \hat{i}\circ\hat{j} &= \hat{j}\circ\hat{k} = \hat{k}\circ\hat{i} = 0. \end{aligned} \quad . \quad . \quad (20)$$

$\vec{A}\circ\vec{B} = AB,$ cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean paralelos, . (21)

$\vec{A}\circ\vec{B} = 0,$ si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares. . (22)

Nótese que, de acuerdo a la ec.(22), el producto punto de dos vectores es igual a cero aun cuando ninguno de los vectores tenga magnitud nula.

El producto punto puede también definirse algebraicamente en términos de las componentes :

$$\vec{A}\circ\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad . \quad (23)$$

Para demostrar que la ec.(23) es equivalente a la definición geométrica (15), basta escribir $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en la forma dada por la ec.(10), y hacer uso de las ecs. (16), (17), (18), y (20), las que a su vez provienen de (15):

$$\begin{aligned}\vec{A}\circ\vec{B} &= (\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z) \circ (\hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z)\\ &= (\hat{i}\circ\hat{i})A_xB_x + (\hat{i}\circ\hat{j})A_xB_y + (\hat{i}\circ\hat{k})A_xB_z + (\hat{j}\circ\hat{i})A_yB_x + (\hat{j}\circ\hat{j})A_yB_y\\ &\quad + (\hat{j}\circ\hat{k})A_yB_z + (\hat{k}\circ\hat{i})A_zB_x + (\hat{k}\circ\hat{j})A_zB_y + (\hat{k}\circ\hat{k})A_zB_z\\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z.\end{aligned}$$

Lo que demuestra la ec.(23). Las propiedades (16) a la (20) pueden demostrarse fácilmente a partir de la definición algebraica (23) y la definición geométrica (15). Podemos mirar las ecs. (21) y (22) como la definición algebraica de paralelismo y perpendicularidad.

Es conveniente definir otro producto, el *producto vectorial*, también conocido con el nombre de *producto cruz* ó *producto externo*. El producto cruz ($\vec{A} \times \vec{B}$) de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se define como un vector perpendicular al plano de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y cuya magnitud es el área del paralelogramo de lados $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El sentido o dirección del vector $\vec{A} \times \vec{B}$

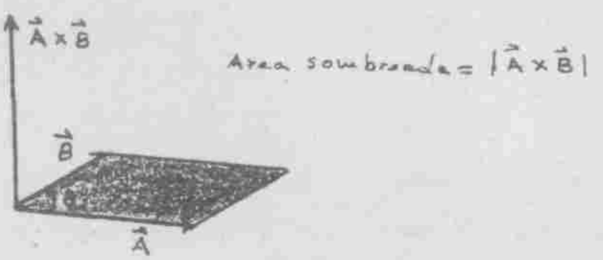


Fig. 11. Definición de producto vectorial.

se define como la dirección de avance de un tornillo de mano derecha rotado de $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$. (Ver la Fig.11). El módulo de $\vec{A} \times \vec{B}$ en función del ángulo θ entre los dos vectores, está dado por la relación

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Note que el producto escalar de dos vectores es un escalar o número, mientras que el producto vectorial es un nuevo vector. El producto vectorial posee las siguientes propiedades algebraicas que pueden demostrarse según la definición de la Fig. 11:*

$$\vec{A} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{A}, \tag{25}$$

$$(c\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (c\vec{B}) = c(\vec{A} \times \vec{B}), \tag{26}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C}), \tag{27}$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0, \tag{28}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0, \qquad \text{cuando } \vec{A} \text{ es paralelo a } \vec{B} \tag{29}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB, \qquad \text{cuando } \vec{A} \text{ es perpendicular a } \vec{B} \tag{30}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \qquad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \qquad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \tag{31}$$

Así que el producto cruz es algebraicamente igual a los productos ordinarios, salvo que no se puede alterar el orden de multiplicación y recordar que los factores son vectores y el resultado es un nuevo vector. Cambiar el orden de los factores en un producto cruz significa cambiar signo. Esta es la primera desviación inesperada de las reglas del álgebra vectorial respecto a las reglas del álgebra ordinaria. En un producto vectorial repetido tal como $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D})$, no es posible destruir o reordenar los paréntesis, pues el resultado no es el mismo en general. Nótese que de acuerdo a (29) es posible que el producto vectorial de dos vectores sea nulo sin que ninguno de ellos lo sea.

A partir de las ecuaciones (25) a (31), y usando (10) para representar $\vec{A}$ y $\vec{B}$, nos es posible demostrar que la definición geométrica (11) es equivalente a la siguiente definición algebraica de producto cruz :

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y,\ A_zB_x - A_xB_z,\ A_xB_y - A_yB_x). \tag{32}$$

También podemos escribir $\vec{A} \times \vec{B}$ como el determinante :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{33}$$

* El signo O representa el vector de magnitud cero, a menudo denominado el vector nulo. No posee ninguna dirección específica, y tiene las siguientes propiedades:

$$\vec{A} + 0 = \vec{A}, \qquad A \circ 0 = 0, \qquad \vec{A} \times 0 = 0, \qquad \vec{A} - \vec{A} = 0, \qquad 0 = (0,0,0)$$

EJERCICIOS

1. Dados los vectores: $\vec{A} = 2\,\hat{i} + 5\,\hat{j} + 7\,\hat{k}$, y
$\vec{B} = 4\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 5\,\hat{k}$,

encontrar, a) el vector suma, b) el vector diferencia,
c) su producto escalar, d) su producto vectorial.
e) Verificar que $(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{A} = (\vec{A}\times\vec{B}).\vec{B} = 0$

2. Encontrar el ángulo que forman entre sí los vectores
$\vec{A} = 2\,\hat{i} + 3\,\hat{j} - \hat{k}$, y $\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 2\,\hat{k}$

3. Encontrar el valor de x tal que los vectores $\vec{A} = 2\,\hat{i} - 3\hat{j} + 5\,\hat{k}$, y $\vec{B} = 3\hat{i} + x\hat{j} - 2\hat{k}$, sean perpendiculares entre sí.

4. Encontrar la componente del vector $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} - 8\hat{k}$ a lo largo del vector $\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$.

5. Dados: $\vec{A} \times \vec{B} = 8\hat{i} - 14\hat{j} + \hat{k}$,
y $\vec{A} + \vec{B} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$,

determinar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. ¿Porqué existen infinitas soluciones?

6. Dados tres vectores de igual magnitud, mostrar de qué manera deben orientarse entre sí para que su suma sea cero. ¿ Es posible hacer ésto en más de una manera ?

7. Dados dos vectores de igual módulo V, que forman entre sí un ángulo ϕ, demostrar que el módulo del vector suma es, $S = 2V\cos(\phi/2)$. Y que el módulo del vector diferencia es $D = 2V\sin(\phi/2)$.

8. Encontrar, por métodos vectoriales, la distancia entre el punto $P(a,b,c)$ y la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$.

9. Demostrar que la ecuación de un plano perpendicular a un vector arbitrario $\vec{p}$, está dada por

$$\vec{r}\,.\,\hat{u}_p = Cte_1., \quad ó \quad \vec{r}\,.\,\vec{p} = cte_2,$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición de un punto cualquiera del plano, y $\vec{u}_p$ un vector unitario en la dirección del vector $\vec{p}$. [Nótese que el producto escalar $\vec{r}\,.\,u_p$ no es otra cosa que la distancia del origen de coordenadas al plano].

10. Demostrar la identidad trigonométrica

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta,$$

haciendo uso de la definición del producto vectorial entre dos vectores. Sugerencia: sean α y β los ángulos que los vectores hacen con el eje X.

11. Recuerde aquel teorema de la geometría que dice: la línea que une los puntos medios de dos lados opuestos de un triángulo es paralela al tercer lado e igual a su mitad. Recuerde además que para su demostración es necesario hacer uso de las relaciones de congruencia entre triángulos.
Demuestre este teorema por métodos vectoriales. Sugerencia: Tome uno de los vértices del triángulo como el origen de coordenadas, y los dos lados que allí concurren como los vectores base. Una vez hecha la demostración observe que en ella no se hizo uso de las relaciones de congruencia; y no deja de ser curioso - por decir lo menos- que las relaciones de semejanza sean parte del alma de los vectores.*

12. Demostrar, por métodos vectoriales, a) que las diagonales de un paralegramo se bisecan, b) que la suma de los cuadrados de sus diagonales es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

13. Una escalera de longitud L reposa apoyada en el suelo y contra un muro perpendicular a aquel. Demostrar que si el pie de la escalera se mueve a una velocidad constante V_o, su punto medio describe un arco de circunferencia de radio L/2 con centro en la intersección del piso y el muro.

14. Una partícula está sometida a la acción de dos fuerzas de módulos P y Q respectivamente, cuyas líneas de acción forman un ángulo θ entre sí. Si se desea balancearlas mediante otras dos fuerzas mutuamente perpendiculares y de igual módulo, ¿ cuál debe ser el módulo común de de estas dos fuerzas?

15. Una partícula se encuentra en equilibrio bajo la acción de seis fuerzas. Si se invierte el sentido de tres de ellas la partícula continúa en equilibrio. Demostrar que la partícula también se encontrará en equilibrio si se suprimen estas tres fuerzas.

16. El vector resultante de otros dos vectores tiene una magnitud de 10 unidades y forma un ángulo 30^o con uno de los vectores componentes cuya magnitud es 12 unidades. Encontrar la magnitud del otro vector componente y el ángulo entre ellos.

---

* Quien desee ver este punto tratado en detalle, no debe dejar de consultar el libro clásico de J. Willard Gibbs, Análisis Vectorial. Dover